

# APLICACIÓN DE UN MODELO COHESIVO DE DAÑO AL CRECIMIENTO DE GRIETAS POR FATIGA

O. López García, A. De Andrés Martínez, J.L. Pérez Aparicio  
 Área de Análisis y Diseño en Ingeniería Mecánica  
 Instituto de Investigación Tecnológica  
 Universidad Pontificia Comillas  
 c/ Santa Cruz de Marcenado 26, 28015 MADRID

31 de Enero 1998

## Resumen

**Resumen** En recientes estudios se ha desarrollado un elemento finito cohesivo tridimensional basado en una ley cohesiva irreversible del tipo Smith-Ferrante. En el presente trabajo se aplica dicho modelo al estudio del crecimiento de grietas por fatiga sobre probetas de tipo CT ("compact tension"). Utilizando una malla simplificada de elementos finitos, se han implantado diferentes algoritmos de extrapolación para evaluar la evolución de la longitud de grieta con el número de ciclos y se han comparado con el resultado analítico.

**Abstract** In recent studies a tridimensional cohesive finite element has been developed based on a Smith-Ferrante-type irreversible cohesive law. In the present work this model has been applied to the study of the fatigue crack growth in a Compact Tension specimen. Using a simplified finite element mesh, different extrapolation algorithms have been implemented and used to evaluate the fatigue crack growth rate. This simulations have been compared with the analytical result.

## 1 INTRODUCCIÓN

En este artículo se propone una aproximación a la predicción de la vida a fatiga basada en el uso de leyes cohesivas. Se parte del punto de vista que considera la fractura como un fenómeno gradual, en la cual se considera que la zona cohesiva en frente de punta de grieta ofrece la resistencia a fractura. La fractura desde el punto de vista macroscópico debe entrañar cierta irreversibilidad en el proceso, lo que requiere la formulación de leyes irreversibles de tipo cohesivo como las propuestas por Needleman [8] o Camacho y Ortiz [3]. La irreversibilidad asociada a la descarga conduce a la acumulación de daño, aspecto que es particularmente crítico en simulaciones de crecimiento de grieta por fatiga. En este artículo se presenta un análisis para evaluar el comportamiento numérico de distintos métodos que estiman la variación de la longitud de grieta con el número de ciclos. Estos métodos pretenden ser una primera aproximación a problemas de crecimiento por fatiga en presencia de zonas plásticas grandes así como etapas cercanas a la rotura definitiva.

## 2 UNA CLASE DE LEYES COHESIVAS IRREVERSIBLES

La pérdida gradual de resistencia con aumento de separación entre las caras de la grieta tiene como resultado final el crecimiento de la misma. La ley cohesiva determina la energía de separación o energía de fractura requerida para la completa formación de la superficie libre. En esta sección se formula una clase de ley cohesiva inelástica que proporciona la base sobre la que se sustenta el modelo de crecimiento por fatiga empleado.

Se considera un cuerpo en una configuración inicial  $B_0 \subset R^3$ . El cuerpo realiza un movimiento descrito por una transformación  $\chi : B_0 \times [0, T] \rightarrow R^3$ , donde  $[0, T]$  es el intervalo de tiempo considerado. Sea  $\mathbf{F}$  el gradiente de deformación y  $\mathbf{P}$  el tensor de tensiones de Piola-Kirchoff [13]. El continuo está dividido en dos partes  $B_0^\pm$  por una superficie cohesiva  $S_0$  orientada según su normal unitaria  $\mathbf{N}$ . La potencia de las fuerzas de volumen  $\rho_0 \mathbf{b}$  y las

fuerzas de contorno  $\mathbf{t}$  es:

$$\dot{W} = \sum \int_{B_0^\pm} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dV_0 + \sum \int_{\partial B_0^\pm} \mathbf{t} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dS_0 \quad (1)$$

donde la suma es sobre las dos partes del cuerpo  $B_0^\pm$ . De igual forma la energía cinética del cuerpo se expresa por:

$$K = \sum \int_{B_0^\pm} \frac{1}{2} \rho_0 |\dot{\boldsymbol{\chi}}|^2 dV_0 \quad (2)$$

La potencia debida a la deformación, es decir, la parte de la potencia aplicada al sólido y que no es empleada en aumentar su energía cinética es por tanto:

$$\begin{aligned} \dot{W} - \dot{K} &= \sum \int_{B_0^\pm} \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dV_0 \quad (3) \\ &+ \sum \int_{\partial B_0^\pm} \mathbf{t} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dS_0 \end{aligned}$$

Adicionalmente, el equilibrio de cantidad de movimiento implica:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} = \rho_0 (\ddot{\boldsymbol{\chi}} - \mathbf{b}) \quad \text{en } B_0^\pm \quad (4)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} \quad \text{sobre } \partial B_0^\pm \quad (5)$$

$$\|\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}\| = \|\mathbf{t}\| = 0 \quad \text{sobre } S_0 \quad (6)$$

donde  $\nabla_0 \cdot$  representa la divergencia material sobre  $B_0$  y  $\mathbf{N}$  es la normal unitaria. Substituyendo (4) en (3), aplicando el teorema de la divergencia y haciendo uso de (5) y (6) se obtiene la potencia de deformación:

$$P^D = \sum \int_{B_0^\pm} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} dV_0 + \sum \int_{S_0} \mathbf{t} \cdot \|\dot{\boldsymbol{\chi}}\| dS_0 \quad (7)$$

Esta expresión generaliza la fórmula de la potencia de deformación [7] para cuerpos con superficies cohesivas. Como en sólidos convencionales, en la primera integral de (7), el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  opera en el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  sobre el volumen del cuerpo. En la segunda integral las tracciones trabajan sobre los incrementos de los desplazamientos ("de apertura") sobre la superficie cohesiva  $S_0$ .

$$\delta = \|\boldsymbol{\chi}\| \quad (8)$$

Las anteriores expresiones fijan la base para el desarrollo de una teoría general de cohesión en sólidos, en la que los desplazamientos de apertura  $\delta$  son una medida de deformación y las tracciones la medida de tensión conjugada.

Se consideran las leyes cohesivas que derivan de una energía libre  $\phi(\delta, \theta, \mathbf{q})$  de la forma:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \phi}{\partial \delta}(\delta, \theta, \mathbf{q}) \quad (9)$$

donde  $\theta$  es la temperatura local y  $\mathbf{q}$  es cualquier conjunto adecuado de variables internas que describen el proceso inelástico relacionado con la decohesión. La evolución de las variables internas de  $\mathbf{q}$  se asume determinada por un conjunto de ecuaciones cinéticas en la forma general:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\delta, \theta, \mathbf{q}) \quad (10)$$

Este estudio se restringe a procesos isotérmicos (independientes de  $\theta$ ), de forma que la estructura potencial que posee la ley cohesiva es una consecuencia directa de la primera y segunda ley termodinámica [5],[6]. La ventaja de éste método es que podemos reducir la identificación de la ley cohesiva desde las tres funciones independientes  $\mathbf{t}(\delta, \theta, \mathbf{q})$  a una única función  $\phi(\delta, \theta, \mathbf{q})$ .

La formulación de las leyes cohesivas en modo mixto sigue a Camacho y Ortiz [3] para definir un desplazamiento de apertura efectiva  $\delta$ . La ley universal de Smith-Ferrante y su aplicación sistemática según [1] proporcionan la siguiente expresión de la función potencial:

$$\phi = e \sigma_c \delta_c \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\delta}{\delta_c} \right) e^{-\delta/\delta_c} \right] \quad (11)$$

donde  $\sigma_c$  es la tracción cohesiva normal máxima y  $\delta_c$  es un desplazamiento de apertura característico.

### 3 ELECCIÓN DE MATERIAL Y PRO-BETA CT

El material elegido para la simulación del crecimiento por fatiga es la aleación Al-7075-T6 con características:

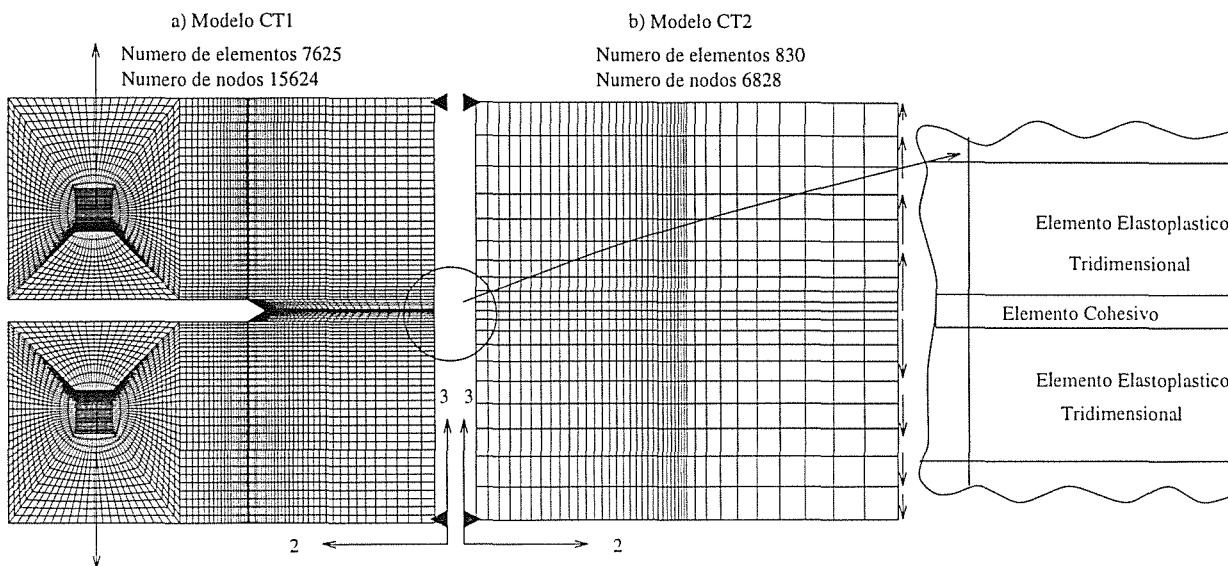


Figura 1: Tipos de malla empleados para modelar probeta CT.

Tabla 1: Propiedades mecánicas de Al-7075-T6

Propiedad	Valor
Módulo Elástico	72000 MPa
Límite Elástico	530 MPa
Tensión de rotura	593 MPa
Tenacidad a la fractura	2490 MPa√mm
Valor crít. energ. lib. en la fractura	86 MPa mm
Apertura crítica	0.053 mm

La probeta que se ha elegido para realizar la simulación es una CT (“compact tension”). De acuerdo con la norma ASTM E 647 [2] se eligen las dimensiones:

Tabla 2 : Dimensiones importantes de la probeta CT

Dimensión	Valor
a	75 mm
w	150 mm
B	10 mm

#### 4 DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS GEOMÉTRICOS EMPLEADOS

Se ha modelado la probeta CT siguiendo dos filosofías (Figura 1). El primer modelo (CT1) simula con todo detalle la geometría, incluyendo la forma de la entalla y los puntos de aplicación de la carga. En el segundo (CT2) se recurre a una geometría mucho más sencilla consiguiendo un menor número de elementos.

En ambos modelos condiciones de contorno apropiadas evitan problemas de convergencia asociados a modos de sólido rígido provocados por rótulas plásticas espúreas. En la Figura 1 se muestra con detalle la inserción de elementos cohesivos entre las caras de los elastoplásticos.

El modelo numérico empleado contiene dos tipos de elementos, el primero elastoplástico tridimensional mejorado (“enhanced”) propuesto por Simo et al. [10], y el segundo cohesivo tridimensional de comportamiento irreversible basado en la ley de Smith-Ferrante [1]

La carga exterior que actúa sobre la probeta se aplica de forma diferente en función del modelo. Para CT1 se aplica en el nodo central de la malla de los bulones, resultando una concentración de tensiones local. En CT2 se aplica una distribución superficial tangencial equivalente a la tensión exterior.

Ambos modelos no utilizan simetría respecto al plano de la fractura: introducir simetría por medio de desplazamientos nulos sobre los elementos cohesivos prescribe sus estados de daño.

##### 4.1 Evaluación de los resultados para el caso de carga estática

Atendiendo a los resultados que se obtienen de los dos modelos bajo carga estática se concluye que es más útil emplear el modelo CT2, con mejor relación resultados frente a tiempo de cálculo: la distribución de tensiones verticales es muy parecida en valor y forma para los dos casos, sin que en CT2 aparezcan de concentración de tensiones en los puntos de aplicación de carga (Figura 2).

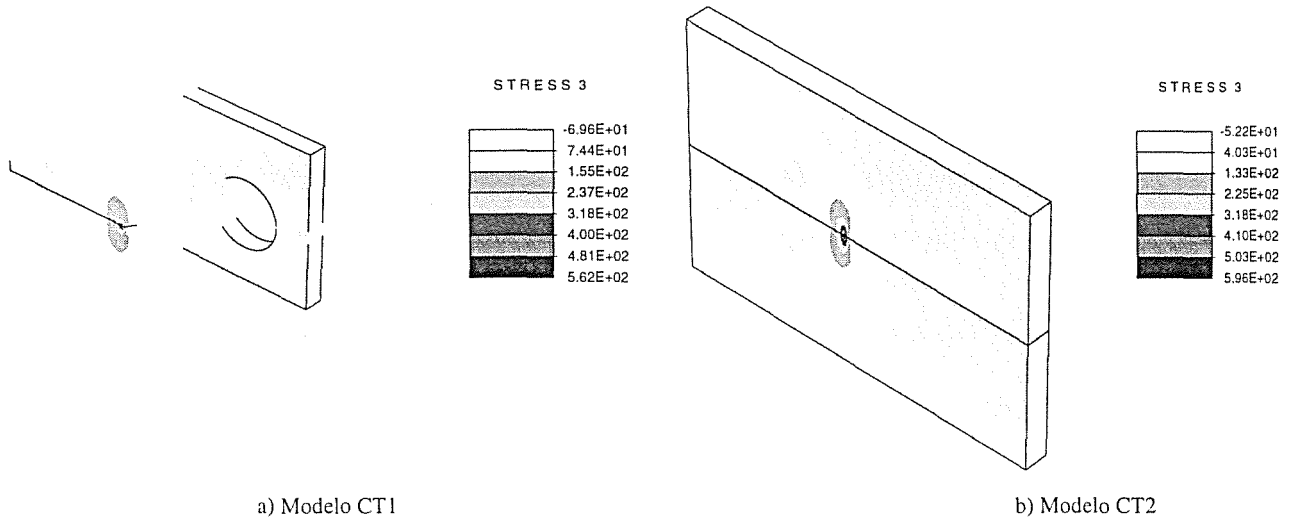


Figura 2: Distribución de esfuerzos en la dirección 3 mostrando la zona plástica de las probetas CT.

## 5 CRECIMIENTO DE GRIETA POR FATIGA

### 5.1 Cálculo analítico vida a fatiga

En primer lugar se presentan las fórmulas analíticas [2] [4] para evaluar la vida a fatiga de la probeta CT. Considerando la expresión del factor de intensificación de tensiones que proporciona la norma [2] podemos evaluar el incremento de dicha magnitud en un ciclo, según:

$$\Delta K = \frac{\Delta P}{B\sqrt{w}} \frac{2 + \xi}{(1 - \xi)^{3/2}} p(\xi) \quad \xi \geq 0.2 \quad (12)$$

donde:  $p(\xi) = 0.886 + 4.64\xi - 13.32\xi^2 + 14.72\xi^3 - 5.6\xi^4$  y  $\xi = a/w$ .

Introduciendo estos valores en un ecuación de velocidad de crecimiento (Forman) podemos evaluar la vida de la probeta como:

$$N = \int_{\xi_i}^{\xi_f} \psi(\xi) d\xi \quad (13)$$

donde  $\xi_f$  es la mínima longitud de grieta que cumple  $K(\xi_f) \geq K_c$  donde  $K_c$  es la tenacidad a fractura.

### 5.2 Extrapolación numérica del daño a fatiga

En un estudio de crecimiento de grieta por fatiga es habitual la presencia de cientos de miles de ciclos, por tanto se introduce en la formulación del elemento finito cohesivo

algoritmos de extrapolación de daño que permitan la evaluación de éste para un número significativo de ciclos en cada paso computacional. Los métodos aquí propuestos se basan en variaciones del desarrollo en serie de Taylor para la función de daño, que en el instante  $n + 1$  se puede evaluar como:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \left( \frac{d\phi}{dN} \right)_n \Delta N_{n+1} \quad (14)$$

donde la evaluación de la  $d\phi/dN$  en el instante  $n$  es objeto de esta sección, y para todos los casos  $\Delta N_{n+1}$  se calcula según:

$$\Delta N_{n+1} = \frac{\phi_{coh} - \phi_0}{\left( \frac{d\phi}{dN} \right)_n} \quad (15)$$

que es el incremento de ciclos necesarios para que los puntos de daño  $\phi_0$  en el instante  $n$  alcancen un daño  $\phi_{coh}$ , suficiente para pertenecer al frente de grieta. Este valor suele fijarse a efectos prácticos en el 80% del valor crítico de la energía liberada en la fractura  $G_c$ , demostrando los cálculos actuales que la elección arbitraria de este valor no afecta fundamentalmente a los resultados finales.

En las siguientes subsecciones se presentan los modelos que calculan el incremento de la función de daño con el número de ciclos  $d\phi/dN$ . Estos modelos se implantarán en el programa de elementos finitos FEAP. [11]

### 5.3 Modelo lineal

En este modelo la derivada de la función de daño, expresada como tracción efectiva  $d\phi/d\delta$  cambia de variable al

objetivo  $d\phi/dN$  mediante el incremento de  $\delta$  y  $N$  entre los instantes  $n$  y  $n - 1$ . El salto  $\Delta N_{n+1}$  se fija a un valor constante relacionado con un incremento de ciclos característico, siendo lo suficientemente pequeño para evitar problemas de no convergencia numérica.

$$\frac{d\phi}{dN} = \frac{d\phi}{d\delta} \frac{\delta_n - \delta_{n-1}}{N_n - N_{n-1}} \quad (16)$$

**5.4 Modelos de velocidad de crecimiento exponencial**

Se ha realizado otra aproximación de  $d\phi/dN$  teniendo en cuenta que la función de daño realmente depende de la apertura, que se puede relacionar con el número de ciclos mediante:

$$\frac{d\phi}{dN} = \left(\frac{d\phi}{d\delta}\right)^3 \frac{\pi}{E \sigma_y} \frac{da}{dN} \quad (17)$$

esta fórmula se basa en las aproximaciones

$$\delta \sim \frac{K^2}{E \sigma_y} \sim \frac{\sigma^2 \pi a}{\sigma_y E} \quad (18)$$

De esta forma se puede relacionar el objetivo  $d\phi/dN$  y las conocidas expresiones para el crecimiento de grietas por fatiga: ecuaciones de Paris, Walker y Forman:

Tabla 3 : Ecuaciones de velocidad de crecimiento exponencial

Ecuación	$\frac{da}{dN}$
Paris	$C \Delta K^m$
Walker	$\frac{C_1 \Delta K^{m_1}}{(1-R)^{(1-\gamma)^{m_1}}}$
Forman	$\frac{C_2 \Delta K^{m_2}}{(1-R) K_c - \Delta K}$

**5.5 Modelo geométrico de apertura**

Según Suresh [9] la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga en la zona lineal de la ecuación de Paris es proporcional al incremento de la apertura del frente de grieta. La base física de este modelo es la relación geométrica entre el espaciado de las estriaciones (marcas de playa) y el proceso de achatamiento en punta de grieta ("crack tip blunting"). La variación del daño con el número de ciclos se expresa según:

$$\frac{d\phi}{dN} = \left(\frac{d\phi}{d\delta}\right)^3 \frac{\pi (\Delta\delta)}{E \sigma_y} \quad (19)$$

Las características de este modelo permiten incluirlo de una forma natural en la teoría cohesiva ya que a diferencia de los anteriores  $d\phi/dN$  no depende directamente del valor del incremento de concentración de tensiones  $\Delta K$ , que en todo caso en los modelos cohesivos no hay que calcular.

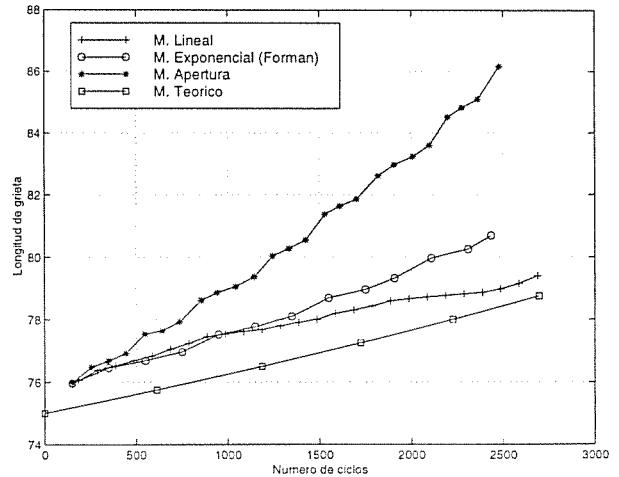


Figura 3 : Evolución de la longitud de grieta con el número de ciclos. Parámetros de la simulación  $p_{max} = 5600N$  y  $R = 0.15$

**5.6 Análisis de los resultados**

En la Figura 3 se presentan los resultados obtenidos en la extrapolación para el criterio analítico y los numéricos (elementos finitos) anteriores.

En primer lugar el resultado analítico, con el que se van a comparar los demás, aparece lineal ya que se dibujan sólo los 3000 primeros ciclos. Las tres curvas de resultados numéricos comienzan en el mismo punto ya que el inicio de la simulación se hace de la misma forma.

Se observa que el método de apertura es el que menos se ajusta al analítico en este rango de ciclos. El método exponencial basado en la expresión de Forman [4] presenta un mejor ajuste aunque es el más inestable numéricamente sobre todo cuando la simulación es hasta la rotura, debido a la singularidad que la ecuación de Forman presenta en puntos cercanos a la fractura.

El método numérico que más se aproxima al analítico es el lineal. Aunque pudiera parecer que métodos más sofisticados debieran ajustarse mejor al analítico, un factor adicional es que en este método  $\Delta N_{n+1}$  se fija a un valor constante, lo suficientemente pequeño para que no proporcione problemas numéricos. Nótese que los diferentes métodos utilizan diferente número de pasos.

El objetivo a medio plazo de esta línea de investigación es, basándose en el estudio de la física cohesiva del problema, obtener valores de  $\Delta N_{n+1}$  variables y óptimos para simular correctamente la curva de crecimiento en cada momento.

## 6 CONCLUSIONES

Los métodos presentados pretenden simular la parte central del crecimiento de grieta por fatiga en una probeta CT. El objetivo futuro es calibrar un nuevo método numérico basado en los elementos finitos a emplear en la simulación de situaciones más complicadas [12]

Las pruebas realizadas muestran que los métodos basados en la velocidad de crecimiento exponencial se muestran más inestables que el basado en la apertura: los primeros, por ejemplo el de Forman, presentan una singularidad cuando la longitud de grieta se aproxima a la crítica, por lo que son particularmente sensibles a divergencias numéricas. Se está estudiando la forma de determinar un incremento variable de ciclos en el modelo lineal con cierto significado físico que se comporte correctamente para todas las zonas de la vida de la probeta.

Como segundo método factible, el basado en la apertura efectiva es el que mejor se ajusta y converge al resultado esperado en la zona próxima a la rotura, por lo que se está desarrollando otro modelo basado en la apertura efectiva que ajuste mejor a la curva de crecimiento de grieta.

## Agradecimientos

Los autores agradecen al Profesor R.L. Taylor su inestimable ayuda y paciencia a la hora de implantar la teoría del método en el programa de elementos finitos FEAP, al Profesor M.Ortiz sus continuas y certeras observaciones acerca de las leyes constitutivas irreversibles y al Profesor F. Armero sus sugerencias acerca del elemento elastoplástico.

## Referencias

[1] DE ANDRÉS A. Y PÉREZ J. L., "Simulación del crecimiento de grietas en materiales dúctiles mediante elementos interface de espesor nulo" *Anales de Mecánica de la Fractura*, **13** (1996)109-113

- [2] ASTM E 647 "Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates", Annual Book of ASTM Standards, Philadelphia, 1991
- [3] CAMACHO G.T. Y ORTIZ M. "Computational Modeling of Impact Damage in Brittle Materials" *Int. J. Solids Stru.*, **33** (1986) 2899-2938
- [4] DOWLING N.E., *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall International Editions, 1993
- [5] LUBLINER J., "On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solids Mechanics", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **7** (1972) 237-254
- [6] LUBLINER J., "On the Structure of the Rate Equations of Materials with Internal Variables", *Acta Mechanica*, **17** (1973) 109-119
- [7] MARSDEN J.E., and HUGHES T.J.R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983
- [8] NEEDLEMAN E., "Micromechanical Modeling of Interfacial Decohesion" *Ultramicroscopy*, **40** (1992) 203-214
- [9] SURESH. S, *Fatigue of Materials*, Cambridge Solid State Science Series, Cambridge University Press, 1991
- [10] SIMO J.C., ARMERO F. Y TAYLOR R.L., "Improved versions of Assumed Enhanced Strains Trilinear Elements for 3D Finite Deformations Problems" *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, **110** (1993) 359-386
- [11] TAYLOR R.L "FEAP A Finite Element Analysis Program" Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, Version 6.00 February 1997
- [12] THOMPSON K.D. AND SHEPPARD S.D., "Fatigue Crack Growth in notched and plain shafts subjected to torsion and axial loading" *Eng. Fract. Mech.* **43-1** 55-71 (1992)
- [13] TRUESDELL C., *A First Course in rational Continuum Mechanics* Vol **1**, Academic Press, 1991